

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА В СЛОЖНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПРОВОДНИКЕ

## ЧАСТЬ 1

А. Ю. Гришенцев

В статье рассмотрена математическая основа модели расчёта распределения плотности тока в сложном, неоднородном проводнике, имеющем произвольную форму поперечного сечения.

### Введение

Получивший в последнее время широкое распространение во всем мире процесс газоразрядной визуализации (ГРВ) [1], непосредственно связан с протеканием токов высокой частоты через исследуемые объекты. При этом наблюдается неравномерное распределение плотности тока по сечению, называемое поверхностным эффектом. Моделирование поверхностного эффекта в однородных проводниках подробно рассмотрено в различной литературе по электротехнике. В данной статье построена математическая модель поверхностного эффекта для случая неоднородных проводников. В этом случае вклад в неравномерность распределения тока по сечению вносит неоднородность среды, например, биологических объектов, исследуемых на ГРВ оборудовании.

Моделирование электропроводящих свойств, сложных биологических тканей, рассмотрено в ряде современной литературы (например: [2–4] и др.). К сожалению не одна из предложенных моделей не позволяет оценить плотность распределения тока по биологическим тканям в процессе ГРВ, ИПЧ исследований.

Автором статьи предложен возможный вариант оценки плотности распределения тока, по биологическим тканям применимый к ГРВ и ИПЧ измерениям. Моделирование производилось на основе законов классической электродинамики ([5–9]), с учетом особенностей протекания токов по биологическим тканям ([3, 4, 10–14]).

Модель плотности распределения высокочастотного тока по сечению во время исследования на ГРВ оборудовании позволяет:

- рассмотреть различия распределения плотности тока в зависимости от электрических параметров исследуемого объекта;
- определить части объекта, по которым протекает преобладающая часть тока;
- предсказать тенденцию распределения плотности тока при изменении электрических параметров исследуемого объекта;
- предсказать тенденцию изменения картины ГРВ-граммы при изменении электрических параметров исследуемого объекта;
- с высокой точностью оценить значения протекающих по различным тканям токов (при исследовании человека) с целью выяснения безопасности обследования на ГРВ, ИПЧ оборудовании.

### Построение математической модели

Рассмотрим картину магнитного поля в плоскости поперечного сечения проводника с током, выполненного из однородного материала (рис. 1). Представим этот провод в виде совокупности нитей, параллельных его оси. Чем ближе нить расположена к оси проводника, тем с большим числом магнитных линий она сцеплена.

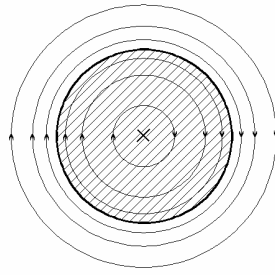


Рис. 1. Магнитное поле в плоскости поперечного сечения проводника с током

При периодическом изменении тока изменяется магнитное поле, и в нитях проводника наводится э.д.с., противодействующие изменениям тока. Это противодействие тем значительнее, чем больше э.д.с. (чем больше магнитных линий сцеплено с нитью), т.е. чем ближе нить проводника расположена к оси провода. В результате плотность тока в различных точках поперечного сечения получается не одинаковой: наибольшая на периферии и наименьшая на его оси.

Рассмотренное явление концентрации переменного тока в поверхностном слое проводника называют поверхностным эффектом. Резкость проявления его возрастает с увеличением частоты  $f$ , диаметра проводника  $d$ , магнитной проницаемости  $\mu$  и удельной проводимости  $\gamma$  материала проводника. Следствием поверхностного эффекта является некоторое уменьшение собственной индуктивности проводника ввиду ослабления магнитного поля во внутренней части проводника. В предельном случае, когда ток концентрируется на поверхности проводника в бесконечно тонком слое, магнитное поле внутри проводника отсутствует.

Другим следствием поверхностного эффекта является возрастание тепловых потерь при одинаковых значениях переменного и постоянного тока (равенстве значения постоянного тока и действующего значения переменного тока): тепловые потери больше при переменном токе. Поэтому сопротивление проводника переменному току (активное сопротивление) выше, чем сопротивление проводника постоянному току.

Степень неравномерности распределения тока по сечению проводника благодаря поверхностному эффекту в каждом конкретном случае можно оценить, сравнивая линейные размеры поперечного сечения провода с длиной волны электромагнитных колебаний в проводнике  $\lambda$  или с эквивалентной глубиной проникновения электромагнитной волны ([8], стр. 6):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (1)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость вещества,  $\gamma$  – удельная объемная электропроводность вещества.

На распределение переменного тока в проводе также оказывают влияние токи соседних проводников. Это явление называют эффектом близости ([6, 8]).

Следует отметить, что в поверхностном слое плотность тока не только убывает по величине, но и изменяется по фазе. На поверхности проводника плотность тока опережает по фазе полный ток на  $45^\circ$ : плотность тока на поверхности пропорциональна комплексной напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , полный ток пропорционален комплексной напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  опережает  $\vec{H}$  по фазе на  $45^\circ$ . По мере перехода к более глубоким слоям плотность тока запаздывает относительно поверхностного тока, и на глубине, равной половине длины волны, ток изменяет направление на противоположное. Однако этот обратный ток не играет существенной роли – в поверхностном слое толщиной в половину длины волны  $\lambda/2$  протекает свыше 95% общего тока [6].

Если проводники имеют сложную форму поперечного сечения, то из-за эффектов поверхностного и близости по отдельным частям проводников протекают токи различной плотности.

Допустим, что имеется проводник длиной  $l$ , произвольного поперечного сечения рис. 2 с током:

$$i = I_m \sin(\omega t), \quad (2)$$

где  $I_m$  – амплитуда тока [А];  $\omega=2\pi f$  – угловая частота тока [рад/сек];  $f$  – частота тока [Гц];  $t$  – текущее время [с]. Разобьем поперечное сечение проводника на элементарные площадки. В проводнике площадки могут отличаться по размерам одна от другой. Однако, для удобства расчетов, желательно иметь одинаковые по размерам площадки. Диаметр площадки рекомендуется выбирать примерно вдвое меньше, чем глубина проникновения  $\delta$ . Будем рассматривать образованные разбиением проводники как элементарные со своим током  $i_k$ , где принимает значения  $0-n$ . Заменим получившийся контур эквивалентной электрической схемой рис. 3, состоящей из  $(n+1)$  ветвей. Если найти токи в каждой ветви, а затем плотность тока в каждом элементарном проводнике, то задача по определению поля плотности тока будет решена.

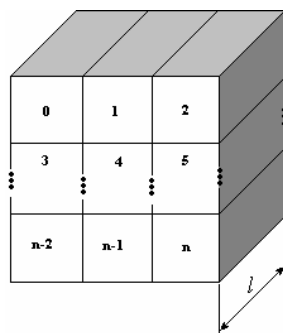


Рис. 2. Проводник произвольного поперечного сечения

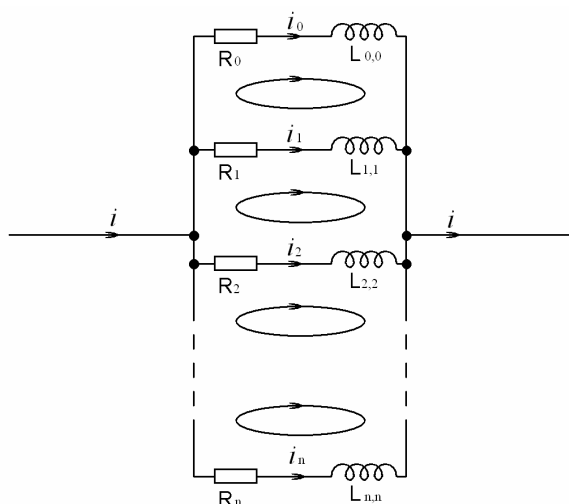


Рис. 3. Эквивалентная схема

На эквивалентной схеме (рис. 3) обозначены:  $I$  – мгновенное значение суммарного тока [А];  $i_0, i_1, \dots, i_n$  – мгновенные значения токов в элементарных проводниках [А];  $L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n}$  – собственные индуктивности элементарных проводников [Гн];  $R_0, R_1, \dots, R_n$  – активные сопротивления элементарных проводников [Ом].

Для расчета собственных индуктивностей ветвей с 0-й по  $n$ -ю рассмотрим произвольный  $k$ -й элемент (рис. 4). Координаты центра сечения элементарного проводника  $x_k, y_k$ ; размеры сечения  $b_k, c_k$  [м]. При моделировании удобно проводить разбиение на элементарные проводники квадратного сечения, поэтому  $b_k=c_k$ . Если размеры сечения элементарного проводника составляют половину или меньше от глубины проникновения  $\delta$ , формула (1) (случай низкой частоты), можно считать плотность тока в пределах сечения единичного проводника постоянной. В этом случае индуктивность и активное сопротивление единичного проводника можно находить, как при постоянном токе. В случае высокой частоты, когда размеры сечения больше половины глубины проникновения, надо учитывать неравномерность распределения тока по сечению. В дальнейшей реализации модели есть возможность разбиения проводника на равные элементарные площадки квадратного (со стороной ребра  $b_k$ ) и кругового (диаметр  $d_k$ ) сечений, поэтому будем рассматривать квадратное и круговое сечения. В приведенных ниже формулах:  $\gamma_k$  – удельная проводимость,  $\delta_k$  – глубина проникновения для  $k$ -го элементарного проводника.

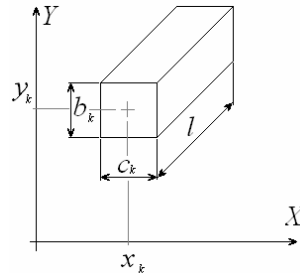


Рис. 4. Произвольный элемент проводника

В случае низкой частоты имеем:

- для проводников квадратного сечения собственную индуктивность будем вычислять по следующей формуле ( $b_k \leq 2\delta$ ) ([8], с. 101):

$$L_{k,k} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{l}{b_k} + \frac{1}{2} - \frac{(\omega \mu_0 \gamma_k)^2 (0.2b_k)^4}{24} \right), \quad (3)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная проницаемость воздуха;

- для расчета индуктивности проводников кругового сечения ( $d_k \leq \delta$ ) ([8], с.96):

$$L_{k,k} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{4l}{d_k} - \frac{3}{4} \right), \quad (4)$$

где  $d_k = b_k$  – диаметр поперечного сечения элементарного проводника [м];

- для прямоугольного сечения, активное сопротивление ( $b_k \leq 2\delta$ ):

$$R_k = \frac{1}{\gamma_k} \frac{l}{b_k^2}; \quad (5)$$

- для кругового сечения, активное сопротивление ( $d_k \leq 2\delta$ ):

$$R_k = \frac{1}{\gamma_k} \frac{4l}{\pi d_k^2}. \quad (6)$$

В случае высокой частоты имеем:

- для проводников квадратного сечения собственную индуктивность будем вычислять по следующей формуле ( $b_k > 2\delta$ ) ([8], с. 101):

$$L_{k,k} = \frac{l}{\pi} \left( \frac{\mu_0}{2} \left( \ln \frac{2l}{0.5902b_k} - 1 \right) + \frac{1}{b_k} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\omega\gamma_k}} \right); \quad (7)$$

- для расчета индуктивности проводников кругового сечения ( $d_k > 2\delta$ ) ([8], с. 96):

$$L_{k,k} = \frac{l}{2\pi} \left( \mu_0 \left( \ln \frac{4l}{d_k} - 1 \right) - \frac{2}{d_k} \sqrt{\frac{\mu_0}{2\omega\gamma_k}} \right); \quad (8)$$

- для прямоугольного сечения с учетом глубины проникновения выведем формулу расчета активного сопротивления ( $b_k > 2\delta$ ):

$$R_k^{\approx} = \frac{1}{\gamma_k} \frac{l}{\left( b_k^2 - \frac{\pi(b_k - 2\delta_k)^2}{4} \right)}; \quad (9)$$

- для кругового сечения с учетом глубины проникновения выведем формулу расчета активного сопротивления ( $d_k > 2\delta$ ):

$$R_k^{\approx} = \frac{1}{\gamma_k} \frac{l}{\pi \delta_k (d_k - \delta_k)}. \quad (10)$$

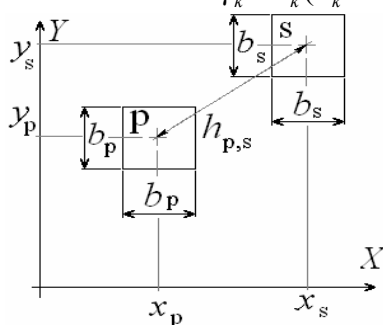


Рис. 5. К расчету взаимной индуктивности элементарных проводников

Рассчитаем взаимные индуктивности  $M$  элементарных проводников. На рис. 5 изображены сечения двух проводников с произвольными номерами  $p, s$ , соответственно координаты центров данных проводников  $(x_p, y_p)$  и  $(x_s, y_s)$ . Расстояние между центрами проводников

$$h_{p,s} = \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2}. \quad (11)$$

Далее будем обозначать взаимные и собственные индуктивности символами  $L_{p,s}$ ,  $L_{k,k}$ , соответственно, так как собственную индуктивность можно рассматривать как взаимную саму на себя. Такое обозначение принято в связи с тем, что численные значения всех индуктивностей удобно при вычислениях хранить в одном массиве данных.

Рассмотрим возможные случаи для расчета взаимной индуктивности элементарных проводников  $p, s$  при различных соотношениях расстояния  $h_{p,s}$  между осями проводников и их длины  $l$  ([8], с. 112):

- при  $h_{p,s} \leq l$ :

$$L_{p,s} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{h_{p,s}} - 1 + \frac{h_{p,s}}{l} - \frac{1}{4} \frac{h_{p,s}^2}{l^2} + \frac{1}{32} \frac{h_{p,s}^4}{l^4} \right); \quad (12)$$

- при  $h_{p,s} > l$ :

$$L_{p,s} = \frac{\mu_0 l^2}{4\pi h_{p,s}} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{l^2}{h_{p,s}^2} + \frac{1}{40} \frac{l^4}{h_{p,s}^4} \right). \quad (13)$$

При расчетах для уменьшения вычислений необходимо учесть, что  $L_{p,s} = L_{s,p}$ . Для схемы замещения рис. 3 можно составить следующие уравнения. Поочередно обходя по часовой стрелке контуры, образованные ветвями 0 и 1, 1 и 2, ...,  $n-1$  и  $n$ , запишем в соответствии с законами Кирхгофа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_{0,1}}{dt} + i_0 R_0 - i_1 R_1 = 0 \\ \frac{d\psi_{1,2}}{dt} + i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \frac{d\psi_{n-1,n}}{dt} + i_{n-1} R_{n-1} - i_n R_n = 0 \\ i = \sum_{k=0}^n i_k \end{array} \right. , \quad (14)$$

где  $\psi_{p,s}$  – потокосцепление контуров, образованных соответствующими ветвями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{0,1} = \Psi_0 - \Psi_1 \\ \psi_{1,2} = \Psi_1 - \Psi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \psi_{n-1,n} = \Psi_{n-1} - \Psi_n \end{array} \right. . \quad (15)$$

Потокосцепления  $\psi_k$ ,  $k=0,1,\dots,n$ , можно рассчитать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_0 = L_{0,0}i_0 + L_{0,1}i_1 + \dots + L_{0,n}i_n \\ \Psi_1 = L_{1,0}i_0 + L_{1,1}i_1 + \dots + L_{1,n}i_n \\ \dots \\ \dots \\ \Psi_n = L_{n,0}i_0 + L_{n,1}i_1 + \dots + L_{n,n}i_n \end{array} \right. , \quad (16)$$

где  $L_{k,k}$  – собственная индуктивность элементарного проводника;  $L_{s,p}=L_{p,s}$  – взаимная индуктивность  $p$  и  $s$  элементарных проводников, соответственно.

Запишем уравнение для расчета  $\psi_{p,s}$ , используя (15) и (16):

$$\psi_{p-1,p} = \sum_{k=0}^n (L_{p-1,k} - L_{p,k})i_k, \quad (17)$$

где  $p=1,2,\dots,n$ . Подставив (17) в (14), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n \frac{d}{dt} (L_{p-1,k} - L_{p,k})i_k + i_{p-1} R_{p-1} - i_p R_p = 0 \\ \sum_{k=0}^n i_k = i \end{array} \right. , \quad (18)$$

где  $p=1,2,\dots,n$ ;  $i$  – суммарный ток.

При синусоидальном токе в проводнике потокосцепление  $\psi_k$  и токи  $i_0, i_1, \dots, i_n$  в элементарных проводниках также изменяются по гармоническому закону. Поэтому можно воспользоваться символическим методом расчета токов в элементарных проводниках. Запишем систему (18) в символическом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} j\omega \sum_{k=0}^n (L_{p-1,k} - L_{p,k}) \dot{I}_k + \dot{I}_{p-1} R_{p-1} - \dot{I}_p R_p = 0 \\ \sum_{k=0}^n \dot{I}_k = \dot{I} \end{array} \right. , \quad (19)$$

где  $j$  – мнимая единица,  $p=1,2,\dots,n$ ;  $\dot{I}$  – суммарный ток. Система уравнений (19) состоит из  $n+1$  уравнений и содержит  $n+1$  неизвестных токов  $\dot{I}_k$ . По вещественным и мни-

мым составляющим токов в элементарных проводниках можно вычислить модуль тока в них:

$$|\dot{I}_k| = \sqrt{[\operatorname{Re}(\dot{I}_k)]^2 + [\operatorname{Im}(\dot{I}_k)]^2}. \quad (20)$$

При решении системы (19) в качестве суммарного тока  $\dot{I}$  можно принимать амплитудное значение. Тогда найденные модули токов  $|\dot{I}_k|$  будут иметь амплитудные значения. Если же понимать суммарный ток как действующий, то и найденные модули токов будут действующими.

Плотность тока в каждом элементарном проводнике можно определить по формулам:

- комплексная плотность токов:

$$\dot{\sigma}_k = \frac{\dot{I}_k}{S_k}; \quad (21)$$

- модуль плотности токов:

$$\sigma_k = |\dot{\sigma}_k| = \frac{|\dot{I}_k|}{S_k}, \quad (22)$$

где  $S_k$  – площадь сечения  $k$ -го элементарного проводника. В зависимости от задания суммарного тока  $\dot{I}$  в качестве амплитудного или действующего, плотность тока  $\sigma_k$  также будет амплитудной или действующей.

### Заключение

Предложенная модель актуальна для моделирования распределения плотности тока по сечению исследуемого объекта в ГРВ-процессах. Новизной модели является учет неоднородности проводящего материала при расчете распределения плотности тока по сечению. В результате проведения расчетов в соответствии с предложенной моделью можно определить распределение комплексной плотности токов по сечению неоднородного проводника произвольной формы.

### Литература

1. Коротков К.Г., Основы ГРВ биоэлектрографии. СПб: СПбГИТМО, 2001.
2. Ордабаев Б.Б., Исаков К. М., Ры. Алма-Ата: Казахский научно исследовательский институт кардиологии, 2000.
3. Рубин А.Б. Теоретическая биофизика. В 2 т. М.: Наука, 2004.
4. Гнездецкий В.В. Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография (картирование и локализация источников электрической активности мозга). М.: МЕД-пресс-информ, 2004.
5. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Основы теории цепей. М.: Энергия, 1975.
6. Новгородцев А.Б., Теория электромагнитного поля, конспект лекций. СПб: СПбГТУ, 1994.
7. Мансуров Н.Н., Попов В.С., Теоретическая электротехника. М.: Энергия, 1966.
8. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А., Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986.
9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Теория функции комплексной переменной. М.: Физматлит, 1999.

10. Коган А.Б., Косицкий Г.И. Физиология человека и животных 1,2. М.: Высшая школа, 1984.
11. Новгородцев А.Б. Теория электромагнитного поля, конспект лекций. СПб: СПбГТУ, 1994.
12. Иванов Г.Г., Николаев Д.В., Возможности оценки общей воды и внеклеточной жидкости методом биоимпедансной спектроскопии: современные подходы к решению актуальной проблемы. // Вестник Российского университета дружбы народов. Кафедра госпитальной терапии. РУДН. Серия «Медицина». 1998. № 1. С. 213–226.
13. Иванов Г.Г., Сыркин А.Л., Дворников В.Е., Мультичастотный сегментарный биоимпедансный анализ в оценке изменений объёма водных секторов организма. М.: Московская медицинская академия им. И.М. Сеченова, Российский университет дружбы народов, НТЦ «Медасс», 2000.
14. Афонин П.Н., Афонин Д.Н., Бегун П.И., Пахарьков Г.Н. Исследование проницаемости кожных капилляров импедансометрическим методом. // Тезисы докладов II Съезда биофизиков России, Москва, 23-27 августа 1999. М., 1999. Т.2. С. 642–643.